

„ელიფსური ტიპის დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნის ბლოკური იტერაციული მეთოდები“

ბათუმის შოთა რუსთაველის
სახელმწიფო უნივერსიტეტი
კომპიუტერულ მეცნიერებათა
დეპარტამენტი

ასოცირებული პროფესორი
ვახტანგ ბერიძე

ბათუმი, 2025

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} - q(x, y)u(x, y) = \\
 & \quad = f(x, y), \quad (x, y) \in G \\
 & \quad u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma \setminus \gamma \\
 & u(1, y) = \sum_{k=1}^m \sigma_k u(x_k, y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 < \sigma_k \\
 & \quad \sum_{k=1}^m \sigma_k < 1, \quad k = 1, \dots, m.
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\bar{G} = [0, 1] \times [0, 1],$$

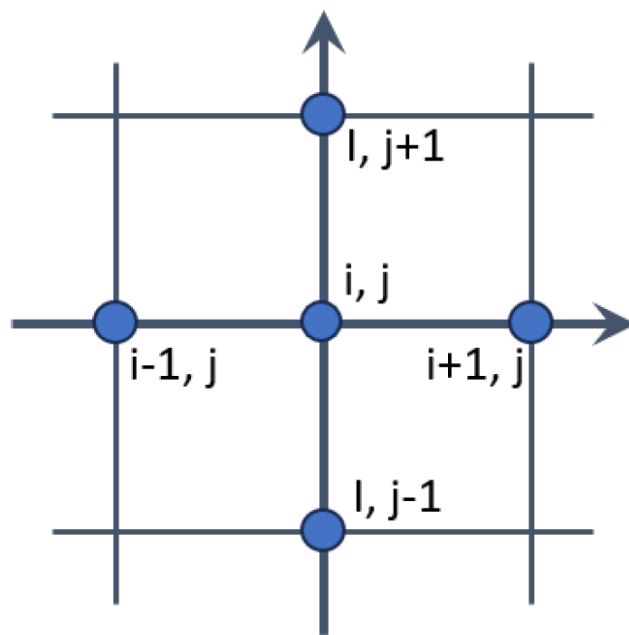
$$\gamma_k = \{(x_k, y) : 0 \leq y \leq 1\}, k = 1, \dots, m,$$

$$\gamma = \{(1, y) : 0 \leq y \leq 1\},$$

$$0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m < 1, \quad 0 \leq q(x, y).$$

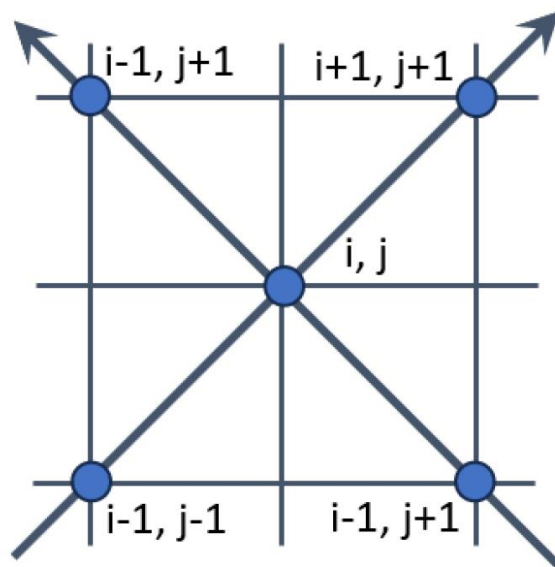
ბლოკური იტერაციული მეთოდების ფორმულირება

$$u_{i-p,j} + u_{i+p,j} + u_{i,j-p} + u_{i,j+p} - (4 + \alpha(ph)^2) u_{i,j} = (ph)^2 f_{i,j} , \quad (4)$$

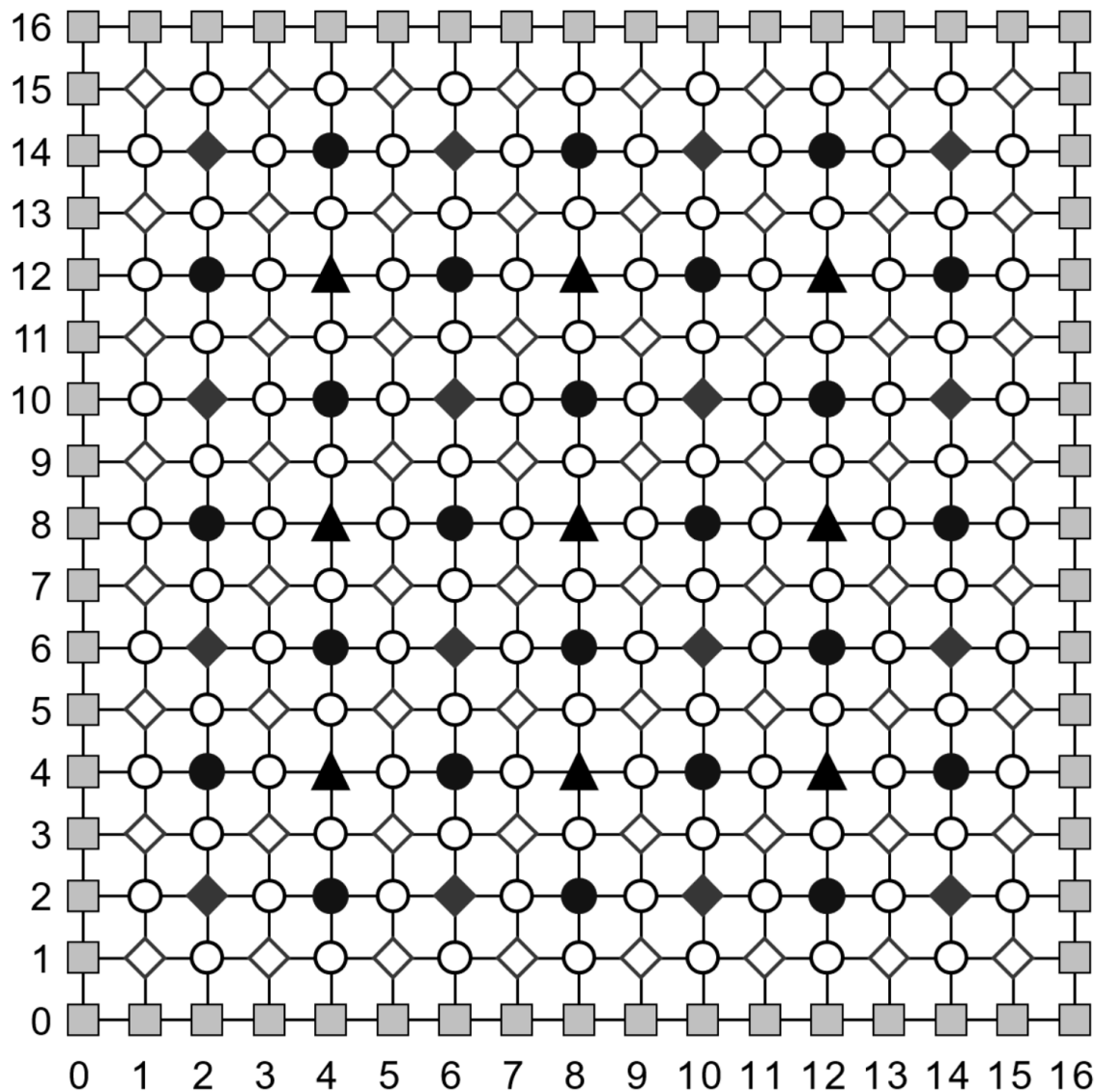


ბლოკური იტერაციული მეთოდების ფორმულირება

$$u_{i+p,j+p} + u_{i-p,j-p} + u_{i+p,j-p} + u_{i-p,j+p} - (4 + 2(ph)^2\alpha) u_{i,j} = 2(ph)^2 f_{i,j} \quad (5)$$



ოთხწერტილოვანი ბლოკური იტერაციული მეთოდის ფორმულირება



ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის დირიხლეს ამოცანის ამოხსნის ფრაგმენტი Mathcad-ში

OMEGGS(e, F, u, N_Iter, ε) := .

N ← rows(u) − 1

e1 ← 4 + e

e2 ← 4 + 2·e

e4 ← 4 + 4·e

e8 ← 4 + 8·e

e16 ← 4 + 16·e

for k ∈ 1 .. N_Iter

u1 ← u

for i ∈ 4, 8 .. N − 4

for j ∈ 4, 8 .. N − 4

$$u_{i,j} \leftarrow \frac{1}{e_{16}} \cdot (u_{i-4,j} + u_{i+4,j} + u_{i,j-4} + u_{i,j+4} + 16F_{i,j})$$

break if norm(u1 − u) < ε

for $k1 \in 1 \dots N_Iter$

$u1 \leftarrow u$

 for $i \in 2, 6 \dots N - 2$

 for $j \in 2, 6 \dots N - 2$

$$u_{i,j} \leftarrow \frac{1}{e8} \cdot (u_{i+2,j+2} + u_{i-2,j-2} + u_{i-2,j+2} + u_{i+2,j-2} + 8F_{i+2,j})$$

 for $i \in 2, 4 \dots N - 1$

 for $j \in 2, 4 \dots N - 1$

 if $\text{mod}(i + j - 2, 4) = 0$

$$\left| \begin{array}{l} u_{i,j} \leftarrow \frac{1}{e4} \cdot (u_{i-2,j} + u_{i+2,j} + u_{i,j+2} + u_{i,j-2} + 4F_{i,j}) \\ u_{i,j} \leftarrow u_{i,j} \end{array} \right.$$

 for $i \in 1, 3 \dots N - 1$

 for $j \in 1, 3 \dots N - 1$

$$u_{i,j} \leftarrow \frac{1}{e2} \cdot (u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} + 2F_{i,j})$$

```
for i ∈ 1,3 .. N - 1
```

```
  for j ∈ 1,3 .. N - 1
```

$$u_{i,j} \leftarrow \frac{1}{e2} \cdot (u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} + 2F_{i,j})$$

```
for i ∈ 1,2 .. N - 1
```

```
  for j ∈ 1,2 .. N - 1
```

```
    if mod(i + j - 1, 2) = 0
```

$$u_{i,j} \leftarrow \frac{1}{e1} \cdot (u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} + F_{i,j})$$

$$u_{i,j} \leftarrow u_{i,j}$$

```
  break if norme(u1 - u) < ε
```

```
return u
```

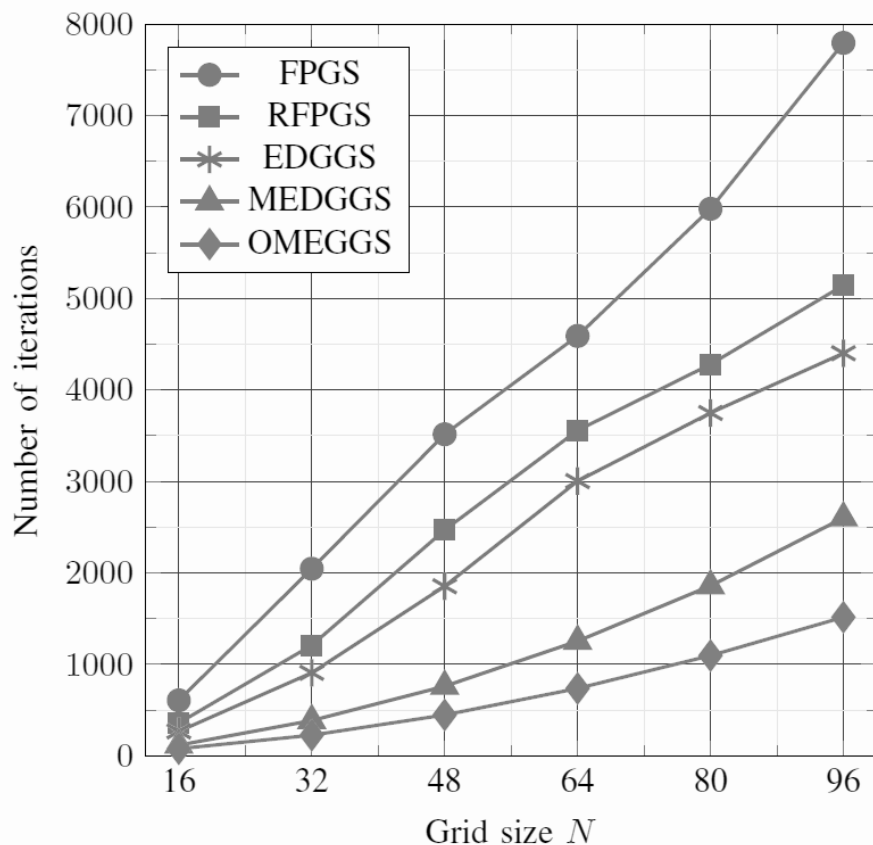

ელიფსური ტიპის დიფერენციალური
განტოლებების ამოხსნის ბლოკური იტერაციული მეთოდების
შედარებითი ანალიზი ცხრილის სახით

Mesh size	Number of iterations				
	<i>FPGS</i>	<i>RFPGS</i>	<i>EDGGS</i>	<i>MEDGGS</i>	<i>OMEGGS</i>
16	607	359	268	117	78
32	2046	1209	908	386	226
48	3516	2469	1854	761	447
64	4591	3558	3004	1254	737
80	5981	4281	3749	1859	1096
96	7795	5144	4402	2602	1516

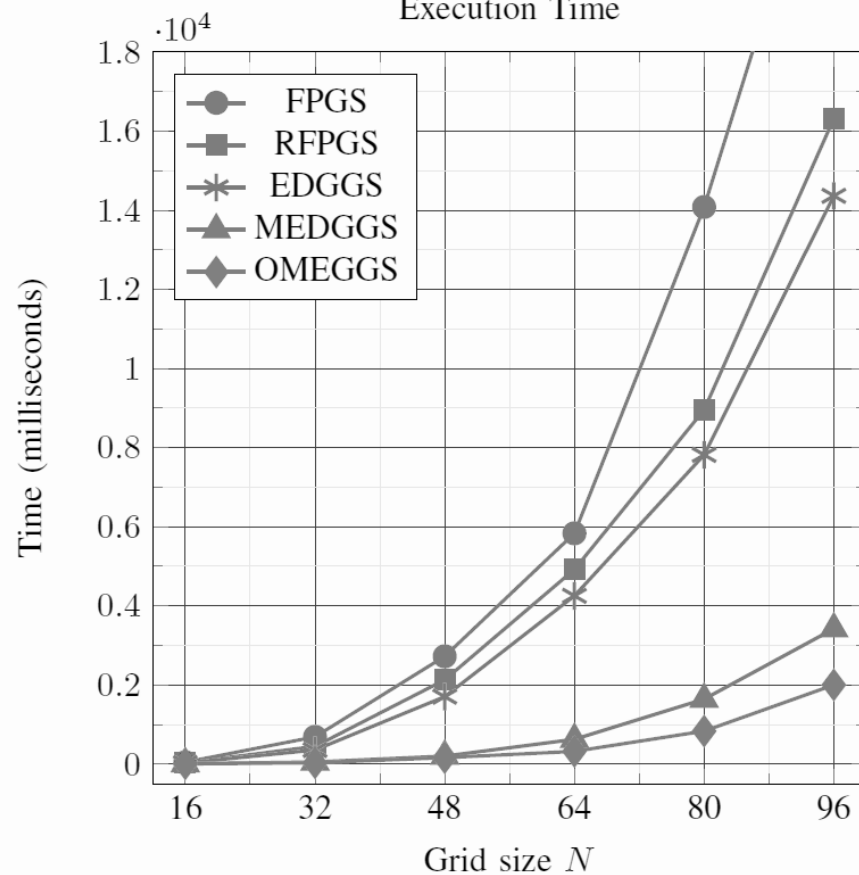
Mesh size	Execution time (milliseconds)				
	<i>FPGS</i>	<i>RFPGS</i>	<i>EDGGS</i>	<i>MEDGGS</i>	<i>OMEGGS</i>
16	47	30	26	8	5
32	688	447	355	52	32
48	2724	2129	1704	201	162
64	5834	4921	4253	625	321
80	14084	8957	7817	1642	833
96	24598	16319	14365	3421	2002

ელიფსური ტიპის დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნის ბლოკური იტერაციული მეთოდების შედარებითი ანალიზი გრაფიკული სახით

Comparison number of iteration



Execution Time





გმადლობთ ყურადღებებისათვის