

მატრიცული თამაშის დაყვანა წრფივ პროგრამირების ამოცანაზე (პროგრამული რეალიზაცია)

განვიხილოთ $m \times n$ განზომილებიანი სასრული თამაში, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგი მატრიცით

$$A = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

პირველი მოთამაშის $U^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_m^*)$ ოპტიმალური სტრატეგიისა და თამაშის z ფასის შემთხვევაში ადგილი აქვს უტოლობას - $\sum_{i=1}^m a_{ij} u_i^* \geq z$, $j = \overline{1, n}$, გარკვეულობისათვის დავუშვათ, რომ $z > 0$. აღნიშნული დაშვება გამართლებულია, რადგან თუ A მატრიცის ყველა ელემენტს ერთიდაიგივე მუდმივ C რიცხვს დავუმატებთ, მაშინ მატრიცის ელემენტების ასეთი ცვლილება ოპტიმალური სტრატეგიების ცვლილებას არ გამოიწვევს, მხოლოდ თამაშის ფასი C სიდიდით შეიცვლება. უკანასკნელი უტოლობის ორივე მხარე გავყოთ z -ზე, მივიღებთ:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \frac{u_i^*}{z} \geq 1, \quad j = \overline{1, n}. \quad (3.2)$$

ავღნიშნოთ

$$\frac{u_i^*}{z} = y_i^*, \quad (3.3)$$

მაშინ

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* \geq 1, \quad j = \overline{1, n}; \quad y_i^* \geq 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (3.4)$$

თუ (3.3) აღნიშვნას გავითვალისწინებთ, მაშინ $\sum_{i=1}^m u_i^*$ პირობის ნაცვლად გვექნება:

$$\sum_{i=1}^m y_i^* = \frac{1}{z}. \quad (3.5)$$

ვინაიდან პირველი მოთამაშის მიზანს მაქსიმალური მოგების მიღება წარმოადგენს, ამიტომ მან $\frac{1}{z}$ სიდიდეს მინიმუმი უნდა უზრუნველყოს. აღნიშნულის გათვალისწინებით პირველი მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგიის განსაზღვრის ამოცანა დაიყვანება $f^* = \sum_{i=1}^m y_i^*$ ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობის მოძებნის ამოცანაზე შემდეგი უტოლობების გათვალისწინებით:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq 1, \quad j = \overline{1, n}; \quad y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (3.6)$$

ანალოგიური მსჯელობის საფუძველზე შეიძლება დავასკვნათ, რომ მეორე მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგიის განსაზღვრის ამოცანა დაიყვანება $f = \sum_{j=1}^n x_j$

ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობის მოძებნის ამოცანაზე შემდეგი უტოლობების გათვალისწინებით:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq 1, \quad i = \overline{1, m}; \quad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3.7)$$

სადაც $x_j = \frac{v_j}{z}$

მაშასადამე, A მატრიცის საფუძველზე განსაზღვრული თამაშის ამონახსნის მისაღებად საჭიროა შევადგინოთ შემდეგი წყვილი დუალური ამოცანებისა და ვიპოვოთ მათი ამონახსნი.

პირდაპირი ამოცანა: ვიპოვოთ $f = \sum_{j=1}^n x_j$ ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა შემდეგი პირობების გათვალისწინებით:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq 1, \quad i = \overline{1, m}; \quad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n},$$

დუალური ამოცანა: ვიპოვოთ $f^* = \sum_{i=1}^m y_i^*$ ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობა შემდეგი პირობების გათვალისწინებით:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i \geq 1, \quad j = \overline{1, n}; \quad y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

გამოვიყონებთ რა წყვილი დუალური ამოცანების ამონახსნებს, მივიღებთ თამაშის სტრატეგიებისა და ფასის განსაზღვრის ფორმულებს:

$$u_i^* = \frac{y_i^*}{\sum_{i=1}^m y_i^*} = zy_i^*; \quad v_j^* = \frac{x_j^*}{\sum_{j=1}^n x_j^*} = zx_j^*; \quad (3.8)$$

$$z = \frac{1}{\sum_{j=1}^n x_j^*} = \frac{1}{\sum_{i=1}^m y_i^*}; \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}.$$

პროგრამული რეალიზაცია

დავალება: განიხილეთ მატრიცული თამაში 4-10 განზომილების, რომლის ელემენტებია ინდექსების ჯამი + ნიშნით, თუ ლუწია და - ნიშნით, თუ კენტია. ჩაწერეთ მათემატიკური მოდელი წრფივი პროგრამირების ამოცანის სახით A და B მოთამაშისთვის.

ამოხსნა

ავაგოთ მატრიცა:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												
12												
13												

მატრიცის თითოეულ ელემენტს დავამატოთ რიცხვი - 13. მივიღებთ მატრიცას:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
16													
17													
18													
19													
20													
21													
22													
23													
24													
25													
26													
27													
28													

A მოთამაშისათვის :

$$L = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \rightarrow \min \quad V' = 1/L, \quad V = V' - 13$$

$$\begin{cases} 15X_1 + 10X_2 + 17X_3 + 8X_4 \geq 1 \\ 10X_1 + 17X_2 + 8X_3 + 19X_4 \geq 1 \\ 17X_1 + 8X_2 + 19X_3 + 6X_4 \geq 1 \\ 8X_1 + 19X_2 + 6X_3 + 21X_4 \geq 1 \\ 19X_1 + 6X_2 + 21X_3 + 4X_4 \geq 1 \\ 6X_1 + 21X_2 + 4X_3 + 23X_4 \geq 1 \\ 21X_1 + 4X_2 + 23X_3 + 2X_4 \geq 1 \\ 4X_1 + 23X_2 + 2X_3 + 25X_4 \geq 1 \\ 23X_1 + 2X_2 + 25X_3 \geq 1 \\ 2X_1 + 25X_2 + 27X_4 \geq 1 \\ X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0 \end{cases}$$

გადავიტანოთ არსებული მონაცემები ექსელში და ამოვხსნათ:

	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
1											
2											
3		A:									
4											
5		X1	X2	X3	X4						
6		1	1	1	1						
7											
8		15	10	17	8	50		L	4		
9		10	17	8	19	54		V'	1/4		
10		17	8	19	6	50		V	-12 3/4		
11		8	19	6	21	54		P1	1/4		
12		19	6	21	4	50		P2	1/4		
13		6	21	4	23	54		P3	1/4		
14		21	4	23	2	50		P4	1/4		
15		4	23	2	25	54					
16		23	2	25	0	50					
17		2	25	0	27	54					
18											
19											
20											
21											

T8 უჯრაში შევიტანოთ =SUMPRODUCT(\$O\$6:\$R\$6,O8:R8)და გავიმეოროთ T17-მდე
W8 უჯრაში შევიტანოთ შემდეგი გამოსახულება =O6+P6+Q6+R6

Solver - ის გამოყენებით შემდეგი პარამეტრებით ვიპოვოთ ამონახსნი

	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
1											
2											
3		A:									
4											
5		X1	X2	X3	X4						
6		0	17/409	15/409	0						
7											
8		15	10	17	8	1.03912		L	32/409		
9		10	17	8	19	1		V'	12 25/32		
10		17	8	19	6	1.02934		V	- 7/32		
11		8	19	6	21	1.00978		P1	0		
12		19	6	21	4	1.01956		P2	17/32		
13		6	21	4	23	1.01956		P3	15/32		
14		21	4	23	2	1.00978		P4	0		
15		4	23	2	25	1.02934					
16		23	2	25	0	1					
17		2	25	0	27	1.03912					
18											
19											
20											

A მოთამაშის ფასი არის : - 7/32

ოპტიმალური სტრატეგია: (0, 17/32, 15/32, 0)